

ESAME 8.7.2022 PARTE 1 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{3}{2}(1 - \cos t) \\ z = \frac{3}{2} \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

La curva è continua perché lo sono le sue componenti.

$$\vec{r}(0) = (0, 0, 0) \neq \vec{r}(2) = (4, 0, 0)$$

$\Rightarrow$ la curva è aperta.

$$\vec{r}'(t) = (2t, \frac{3}{2} \sin t, \frac{3}{2} \cos t)$$

$x'(t) > 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ la prima coordinata

è monotona $\Rightarrow$ la curva è semplice.

$$\begin{aligned} |\vec{r}'(t)| &= \sqrt{4t^2 + \frac{9}{4} \sin^2 t + \frac{9}{4} \cos^2 t} = \sqrt{\frac{9}{4} + 4t^2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{16}{9} t^2} \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

$\vec{r} \in C^1([0, 2\pi]) \quad \vec{r}' \neq 0 \quad \forall t \in [0, 2\pi] \Rightarrow$ la curva è regolare.

$$l(y) = \int_{\gamma} ds = \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{16}{9} t^2} dt =$$

$$\frac{4}{3} t = \sinh x \quad dt = \frac{3}{4} \cosh x dx$$

$$x_1 : \sinh x_1 = \frac{8\pi}{3} \quad \cosh x_1 = \sqrt{1 + \frac{64\pi^2}{9}}$$

$$\sinh x_1 + \cosh x_1 = e^{x_1}$$

$$x_1 = \lg \left[\frac{8\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{64\pi^2}{9}} \right]$$

$$l(y) = \frac{9}{8} \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \sinh^2 x} \cosh x dx =$$

$$= \frac{9}{8} \int_0^{x_1} (\cosh x)^2 dx = \frac{9}{8} \int_0^{x_1} (e^{2x} + e^{-2x} + 2) dx$$

$$= \frac{9}{8} \left[\frac{1}{2} (e^{2x_1} - 1) - \frac{1}{2} (e^{-2x_1} - 1) + 2x_1 \right] =$$

$$= \frac{9}{8} \left[\frac{e^{2x_1} - e^{-2x_1}}{2} + 2x_1 \right] = \frac{9}{4} \left[\frac{(e^{x_1} - e^{-x_1})(e^{x_1} + e^{-x_1})}{4} + x_1 \right]$$

$$= \frac{9}{4} [\sinh x_1 \cosh x_1 + x_1] =$$

$$= \frac{9}{4} \left[\frac{8\pi}{3} \sqrt{1 + \frac{64\pi^2}{9}} + \lg \left[\frac{8\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{64\pi^2}{9}} \right] \right]$$

ESERCIZIO 2

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^2 + 2m}{x^2 m^4 + 1}$$

$$f_m(x) > 0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la CN è verificata in $I = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\forall x \in I$$

$$f_m(x) \sim \frac{2m}{x^2 m^4} = \frac{2}{x^2 m^3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{x^2 m^3} = \frac{2}{x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente e puntualmente $\forall x \in I$.

CONVERGENZA TOTALE : $f_m(x)$ è pari $\Rightarrow$ studio in $(0, +\infty)$

$$f'_m(x) = \frac{2x(x^2 m^4 + 1) - 2x m^4 (x^2 + 2m)}{(x^2 m^4 + 1)^2} = \frac{2x(1 - 2m^5)}{(x^2 m^4 + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'_m(x) < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \Rightarrow f_m(x) \text{ è decrescente} \\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in I} |f_m(x)| = f_m(0) = 2m$$

= la serie non converge totalmente in I

$$\text{Sia } I_\delta = [-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty) \quad \delta > 0$$

$$\max_{x \in I_\delta} |f_m(x)| = f_m(\delta) = \frac{\delta^2 + 2n}{\delta^2 m^4 + 1} \sim_{m \rightarrow \infty} \frac{2m}{\delta^2 m^4} = \frac{2}{\delta^2 m^3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\delta^2 m^3} < +\infty \Rightarrow \text{la serie converge totalmente}$$

$$\forall \delta > 0$$

$$\text{in } I_\delta \quad \forall \delta > 0,$$

$$f_m(x) \in C^0(I_\delta)$$

$$\sum_m f_m(x) \text{ converge totalmente in } I_\delta$$

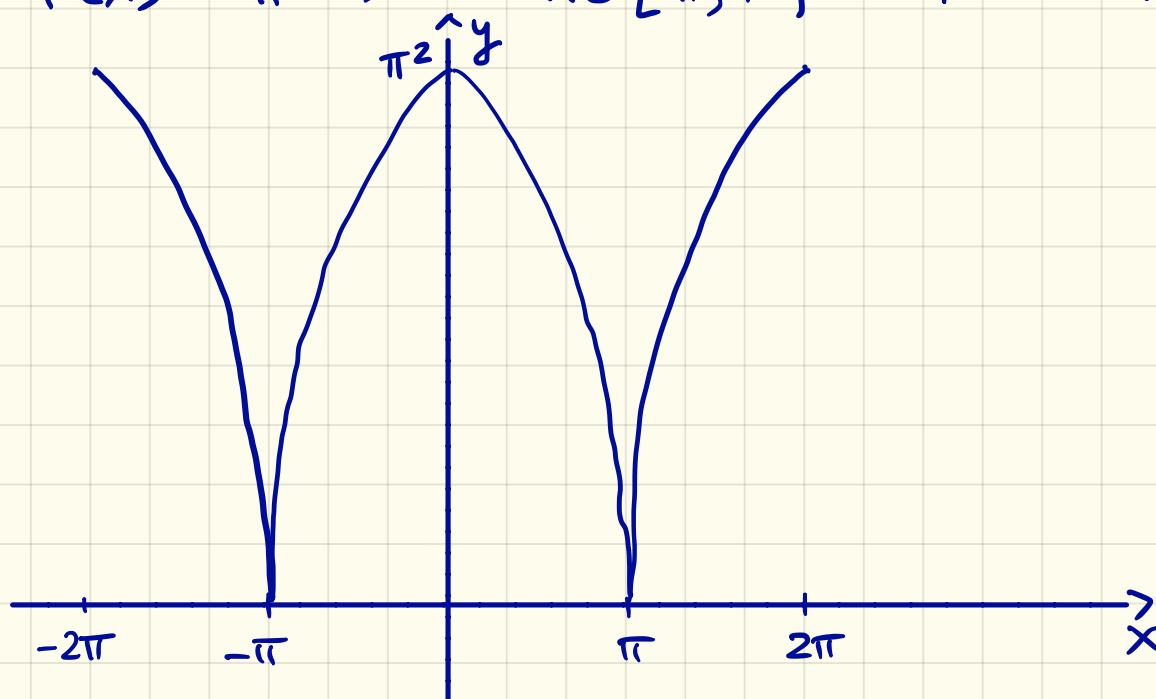
$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) = S(x) \in C^0(I_\delta)$$

$$\text{Quello che dato che } \forall x_0 \in I \exists \delta > 0 : x_0 \in I_\delta$$

$$\Rightarrow S(x) \text{ è continua in } x_0 \Rightarrow S(x) \in C(I)$$

ESERCIZIO 3

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad x \in [-\pi, \pi) \quad T = 2\pi \quad f \text{ pari}$$



$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \left(\pi^3 - \frac{1}{3} \pi^3 \right) = \frac{4}{3} \pi^2$$

$$a_k = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos kx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[(\pi^2 - x^2) \frac{1}{k} \sin kx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2x}{k} \sin kx dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{2}{k^2} x \cos kx \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2}{k^2} \cos kx dx \right] = -\frac{4}{k^2} (-1)^k$$

$$b_k = 0 \quad f \text{ è pari.}$$

$$f(x) \sim \frac{2}{3} \pi^2 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

$f \in C^0(\mathbb{R})$ $f'(x) = -2x$ è regolare a tratti

$f(-\pi) = f(\pi) \Rightarrow a_k = o(\frac{1}{k})$ mi accorto
con quanto trovato.

$f(x)$ regolare a tratti in $[-\pi, \pi) \Rightarrow$ la serie
di Fourier
converge a

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \in (-\pi, \pi) \\ \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} & x = -\pi, \pi \end{cases}$$

Essendo inoltre $f \in C^0(\mathbb{R}) \Rightarrow S(x) = f(x)$

La funzione è integrabile in $[-\pi, \pi) \Rightarrow$

la serie converge in media quadratica ad $f(x)$

CONVERGENZA TOTALE

$$\left| \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx \right| \leq \frac{1}{k^2} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente.

Convergenza totale segue anche dal fatto che

$$a_k = o(1/k)$$

Dato che $s(x) = f(x)$ posso scrivere

$$f(x) = \frac{2}{3}\pi^2 - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx) = \pi^2 - x^2$$

$$f(0) = \pi^2 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

ESERCIZIO 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1} \frac{\lg n}{2^n}$$

Serie di potenze $a_n = \frac{\lg n}{(n+1) 2^n}$ $x_0 = 1$

RAGGIO di CONVERGENZA

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\lg(n+1)}{(n+2) 2^{n+1}} \frac{(n+1) 2^n}{\lg n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \Rightarrow R=2$$

La serie converge assolutamente in $I = (-1, 3)$

$$x = -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lg n}{n+1} \quad \frac{\lg n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ per il criterio di Leibniz la serie converge

$$x = 3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{n+1} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie diverge

$\Rightarrow$ la serie converge puntualmente in $[-1, 3)$

CONVERGENZA TOTALE

$$\sup_{x \in (-1, 3)} \left| \frac{(x-1)^n}{n+1} \frac{\lg n}{2^n} \right| = \frac{\lg n}{n+1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{n+1} = +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie non converge totalmente in $(-1, 3)$.

$$I_\delta = [1-\delta, 1+\delta] \quad \delta \in (0, 2)$$

$$\max_{x \in I_\delta} \frac{(x-1)^n \lg n}{(n+1) 2^n} = \frac{\delta^n \lg n}{(n+1) 2^n} = \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \frac{\lg n}{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{2}\right)^n \frac{\lg n}{n+1} \text{ converge in fatti}$$

applicando il criterio del rapporto si ha

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{n+1} \frac{\lg(n+1)}{n+2} \frac{n+2}{\lg n} \frac{1}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\delta}{2} < 1 \quad \forall \delta \in (0, 2)$$

$\Rightarrow$ la serie converge totalmente in

$$I_\delta \quad \forall \delta \in (0, 2)$$

$$f_n(x) = \frac{(x-1)^n \lg n}{(n+1) 2^n} \in C^0(I_\delta)$$

$$\sum_n f_n(x) \text{ converge totalmente in } I_\delta$$

$$\Rightarrow S(x) \in C^0(I_\delta) \quad \forall \delta \in (0, 2)$$

noto che $\forall x \in I = (-1, 3) \quad \exists \delta \in (0, 2) :$

$$x_0 \in I_\delta \Rightarrow S(x) \text{ è continuo in } x_0 \Rightarrow S(x) \in C^0(-1, 3).$$

ESERCIZIO 5

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \cos 1/y & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos 1/y - \sin 1/y & y \neq 0 \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate sull'asse $(x_0, 0)$ $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = \left. \frac{d}{dx} f(x, 0) \right|_{x=x_0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, h) - f(x_0, 0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cos 1/h}{h} = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y \rightarrow 0} (2y \cos 1/y - \sin 1/y) = \text{non esiste}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}$ non è continua in $(0,0)$.

DIFFERENTIABILITÀ in $(0,0)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k^2 \cos 1/k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad \text{in fatti}$$

$$\left| \frac{k^2 \cos 1/k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \frac{k^2}{|k|} = |k| \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0$$

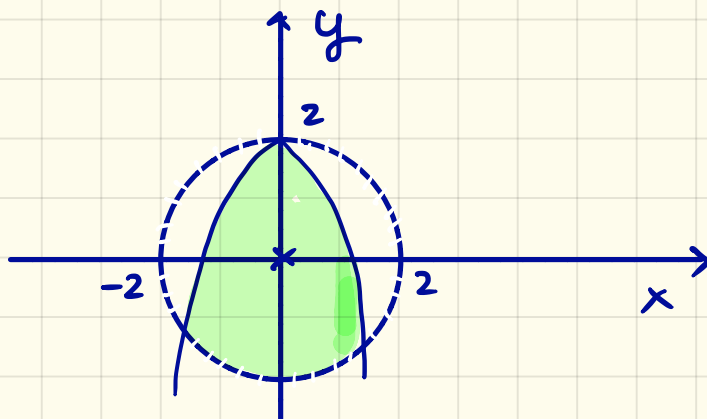
ESERCIZIO 6

$$f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha} |y|^{\beta}}{x^2+y^2} \left[\lg(4 - (x+y)^2 + 2xy) + \sqrt{2-y-x^2} \right]$$

DOMINIO

$$\begin{cases} 4 - (x+y)^2 + 2xy > 0 \\ 2 - y - x^2 \geq 0 \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^2 - y^2 > 0 \\ 2 - x^2 \geq y \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ y \leq -x^2 + 2 \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$



La funzione è limitata
comune, né chiuso né aperto.

Devo dimostrare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \lg[4 - (x+y)^2 + 2xy] = \lg 4$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{2-y-x^2} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 2$$

$$\left| \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} = \text{in coordinate polar}$$

$$= \frac{\rho^{\alpha+\beta} |\cos\theta|^\alpha |\sin\theta|^\beta}{\rho^2} \leq \rho^{\alpha+\beta-2} \rightarrow 0 \text{ se } \alpha+\beta > 2$$

Se $\alpha + \beta = 2$ in coordinate polar

$$f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = |\cos\theta|^\alpha |\sin\theta|^\beta$$

$\Rightarrow$ il limite non esiste

Se $\alpha + \beta < 2$ $y = x$

$$f(x, x) = \frac{|x|^{\alpha+\beta}}{2|x|^2} = \frac{1}{2|x|^{2-(\alpha+\beta)}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} +\infty$$

il limite non esiste finito.

$\Rightarrow$ il limite esiste finito ed è zero se e soltanto se $\alpha + \beta > 2$.