

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 8.7.2022

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la curva descritta dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \frac{3}{2}(1 - \cos t) \\ z = \frac{3}{2} \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

- a** stabilire se la curva è continua, chiusa, semplice;
- b** calcolare il vettore derivato e il suo modulo;
- c** stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;
- d** calcolare la lunghezza della curva.

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + 2n}{x^2 n^4 + 1}$$

- a** Determinare gli intervalli di convergenza puntuale ed assoluta.
- b** Determinare gli intervalli di convergenza totale.
- c** Discutere la continuità della somma della serie $S(x)$.

Esercizio 3 Sia f la funzione, periodica di periodo $T = 2\pi$ e tale che

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad x \in [-\pi, \pi]$$

- a** disegnare il grafico della funzione in $[-2\pi, 2\pi]$ e scrivere la serie di Fourier associata; discutere la velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier;
- b** studiare la convergenza in media quadratica, puntuale e totale della serie di Fourier trovata e calcolarne la somma;
- c** usare la somma della serie per calcolare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n+1} \frac{\log n}{2^n}$$

- a** si determini l'intervallo I dei punti di convergenza assoluta;
- b** dimostrare che esiste un intervallo $I' \subset I$ in cui la serie converge totalmente;
- c** dimostrare che la somma della serie è continua in I .

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \cos \frac{1}{y} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0, \end{cases}$$

dimostrare che nel punto $(0, 0)$ la funzione è differenziabile ma le derivate parziali non sono continue.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2 + y^2} [\log(4 - (x+y)^2 + 2xy) + \sqrt{2 - y - x^2}]$$

- a** determinare il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso);
- b** verificare che la funzione ammette limite finito (uguale a zero) per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ se e soltanto se $\alpha + \beta > 2$