

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 6.6.2022

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la curva γ il cui sostegno è il bordo ∂D di

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + (y - 1)^2 \geq 1, 1 \leq y \leq 2 - \frac{x^2}{4}\}$$

- a** stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;
- b** calcolare il vettore derivato e il suo modulo;
- c** stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;
- d** calcolare l'integrale curvilineo di

$$f(x, y) = \frac{xy - x}{\sqrt{4 + x^2}}$$

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{e^{-nx^2}}{x^4}$$

- a** Determinare gli intervalli di convergenza puntuale ed assoluta.
- b** Determinare gli intervalli di convergenza totale.
- c** Discutere la continuità e la derivabilità della somma della serie $S(x)$.

Esercizio 3 Data la funzione periodica di periodo $T = 2\pi$

$$f(x) = 1 + x \quad x \in [-\pi, \pi)$$

- a** calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, e scrivere la serie di Fourier associata;
- b** studiare la convergenza in media quadratica della serie di Fourier e dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6};$$

- c** calcolare la somma della serie di Fourier;
- d** studiare la derivabilità termine a termine della serie di Fourier.

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n$$

- a** si determini l'insieme dei punti dove converge;
- b** dire se converge totalmente in $[0, \frac{\pi}{4}]$;
- c** calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\sin x)^n \right) dx$$

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = |xy|^\alpha \quad \alpha > 0,$$

stabilire per quali valori di α la funzione è differenziabile in tutto il suo dominio.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{[x^3 + (y - 1)^2] \sin(\sqrt{1 - \tan x})}{x^2 + (y - 1)^2}$$

- a** Determinare il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).
- b** Calcolare il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 1)$.