

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

1 Parte 12.7.2024

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin[2n(x-1)]}{[2+n(x-1)^2]n \log n}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a Dimostrare che essa converge puntualmente in $\mathbb{R}$.

b Dimostrare che la somma della serie $S(x)$ è continua nell'intervallo $[2, \infty)$.

c Determinare una stima dall'alto di $S(x)$ ponendo $a = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n}$.

Esercizio 2 Data la curva γ definita dall'equazione polare

$$\rho = \theta^3, \quad \theta \in [0, 4\pi]$$

a stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;

b calcolare il vettore derivato e il suo modulo;

c stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;

d calcolare la lunghezza di γ .

Esercizio 3 Data la funzione periodica di periodo $T = \pi$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ \sin x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

a Disegnare il grafico in $[-\pi, \pi]$ e, usando la teoria, studiare la velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier e calcolare la somma della serie di Fourier associata ad $f(x)$.

b Calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$,

c Studiare la convergenza totale della serie di Fourier.

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^n e^{-n(x-1)^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

studiarne la convergenza puntuale, assoluta e totale;

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2 \log(1+x^3)}{x^4 + 3y^2} [\log(2x^2 + y + 2) - \log(1+y)]$$

a Determinarne il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).

b Studiarne il segno e dire se può essere prolungata con continuità in $(0, 0)$.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^{\frac{2}{3}} + (x-1)|x-1| - |y| \sin y}{\sqrt[4]{(x-1)^4 + y^4}} & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

a stabilire se è continua in $(1, 0)$;

b stabilire se è derivabile in $(1, 0)$ ed, in caso affermativo, calcolare $\nabla f(1, 0)$;

c stabilire se è differenziabile in $(1, 0)$;

ESAME 12.7.2024 PARTE 1 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin[2n(x-1)]}{[2+n(x-1)^2]n \lg n} = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) \quad x \in \mathbb{R}$$

CONDIZIONE NECESSARIA

$$f_n(1) = 0$$

$$\text{Se } x \neq 1 \quad f_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sin(2n(x-1))}{n^2 \lg n (x-1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow$ la CN è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$

CONVERGENZA PUNTUALE

$$f_n(1) = 0 \Rightarrow \text{la serie converge per } x=0$$

$$x \neq 1 \quad |f_n(x)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left| \frac{\sin[2n(x-1)]}{(x-1)^2 n^2 \lg n} \right|$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin(2n(x-1))}{(x-1)^2 n^2 \lg n} \right| &= \frac{1}{(x-1)^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\sin(2n(x-1))|}{n^2 \lg n} \\ &\leq \frac{1}{(x-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lg n} \leq \frac{1}{(x-1)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente e puntualmente
 $\forall x \in \mathbb{R}$

CONVERGENZA TOTALE in $[2, +\infty) = I$

Osservo che $(x-1)^2 \geq 1 \quad \forall x \in [2, +\infty)$

$$\Rightarrow |f_m(x)| \leq \frac{1}{m^2 \lg m (x-1)^2} \leq \frac{1}{m^2 \lg m} \leq \frac{1}{m^2} \quad \forall x \in [2, +\infty)$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} < +\infty \Rightarrow \text{La serie converge totalmente in } I$$

Dato che

i) $f_m(x) \in C^0([2, +\infty))$

ii) $\sum_{m=2}^{\infty} f_m(x)$ converge totalmente in $I = [2, +\infty)$

$\Rightarrow$ la somma della serie $S(x) \in C^0([2, +\infty))$

Stima di $S(x)$ $a = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2 \lg m}$

$$S(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin(2m(x-1))}{(2+m(x-1)^2) m \lg m}$$

$$S(1) = 0, \text{ se } x \neq 1$$

$$|S(x)| \leq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(2+m(x-1)^2) m \lg m} \leq \frac{1}{(x-1)^2} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2 \lg m} \leq \frac{a}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow |S(x)| \begin{cases} = 0 & x = 1 \\ \leq \frac{a}{(x-1)^2} & x \neq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

$$\rho = \theta^3 \quad \theta \in [0, 4\pi]$$

Curva con equazione polare $\rho(\theta) = \theta^3$, dato

che $\rho \in C^0[0, 4\pi] \Rightarrow$ la curva è continua

$$\vec{r}(\theta) = \theta^3 (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\vec{r}(0) = (0, 0) \neq \vec{r}(4\pi) = (4\pi)^3 (1, 0) \Rightarrow \text{curva APERTA}$$

$\rho(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$ inoltre ρ è una funzione
iniettiva $\Rightarrow$ la curva è semplice.

$$\vec{r}(\theta) \in C^1([0, 4\pi])$$

$$|\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{\theta^6 + 9\theta^4} = \theta^2 \sqrt{\theta^2 + 9} = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

La curva ha un pto di non regolarità in $\theta = 0$

$\Rightarrow$ è regolare in $[0, 4\pi]$

$$L(\gamma) = \int_0^{4\pi} |\vec{r}'(\theta)| d\theta = \int_0^{4\pi} \theta^2 \sqrt{\theta^2 + 9} d\theta$$

$$\theta = 3 \sinh t \quad d\theta = 3 \cosh t dt$$

$$\sinh t^* = \frac{4\pi}{3} \quad \cosh t^* = \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2}$$

$$t^* = \lg \left[\frac{4\pi}{3} + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2} \right]$$

$$\Rightarrow l(f) = \int_0^{t^*} (3 \sinh t)^2 \sqrt{9 + 9(\sinh t)^2} \cdot 3 \cosh t \, dt$$

$$= 3^4 \int_0^{t^*} (\sinh t)^2 (\cosh t)^2 \, dt$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \int_0^{t^*} (e^t - e^{-t})^2 (e^t + e^{-t}) \, dt =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \int_0^{t^*} (e^{2t} - e^{-2t})^2 \, dt =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \int_0^{t^*} (e^{4t} + e^{-4t} - 2) \, dt =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{4} e^{4t} - \frac{1}{4} e^{-4t} - 2t \right) \Big|_0^{t^*} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 \left[\frac{e^{4t^*} - e^{-4t^*}}{4} - 2t^* \right] =$$

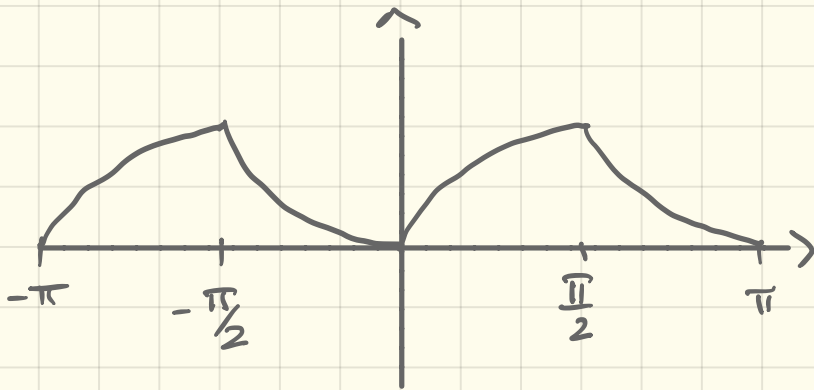
$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 [\sinh(2t^*) \cosh(2t^*) - 2t^*]$$

ESERCIZIO 3

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0] \\ \sin x & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$T = \pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$$



$$f'(x) = \begin{cases} \sin x & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \cos x & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in $x=0$.

i) $f \in C^0([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$ $f(-\frac{\pi}{2}) = 1 = f(\frac{\pi}{2})$

ii) f' è regolare a tratti.

$\Rightarrow$ usando le teoreme sulle velocità di

convergenza a zero dei coeff. di Fourier

$$\Rightarrow a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k}\right)$$

f è regolare a tratti $\Rightarrow$ la serie di Fourier
 coincide ad f converge puntualmente ad $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} f(x^+) + f(x^-) & x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \frac{f(-\pi/2^+) + f(-\pi/2^-)}{2} & x = -\pi/2, \pi/2 \end{cases}$$

Dato che $f \in C^0([-\pi/2, \pi/2])$ e $f(-\pi/2) = f(\pi/2)$

$$S(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & x \in [-\pi/2, 0] \\ \sin x & x \in [0, \pi/2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow S(x) = f(x)$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^0 (1 - \cos x) dx + \int_0^{\pi/2} \sin x dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left. x - \sin x \right|_{-\pi/2}^0 - \cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - 1 + 1 \right] = 1$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^0 (1 - \cos x) \cos(2kx) dx + \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2kx) dx \right]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2k} \sin(2kx) \right]_{-\pi/2}^0 - \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos[(2k+1)x] + \cos[(2k-1)x]}{2} dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2k+1)x] - \sin[(2k-1)x]}{2} dx \Bigg] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{4k^2 - 1} \sim \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k - 1}{4k^2} \sim o\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^0 (1 - \cos x) \sin(2kx) dx + \int_0^{\pi/2} \sin x \sin(2kx) dx \right]$$

Procedimento
analogo
di calcolo di
 a_k .

ESERCIZIO 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(x-1)^n e^{-n(x-1)^2}}_{f_n(x)} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = (x-1) e^{-(x-1)^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} y^n$ è una serie di potenze (geometrica)

che converge $\forall y \in (-1, 1)$

$$f(x) = (x-1) e^{-(x-1)^2}$$

$$f'(x) = (1 - 2(x-1)^2) e^{-(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e} < 1, \quad f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e} > -1$$

$$x = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ punto di max} \quad x = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pto di min}$$

$$f(x) \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}e}, \frac{1}{\sqrt{2}e}\right] \subset (-1, 1)$$

$\Rightarrow$ La serie converge assolutamente e

puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$

CONVERGENZA TOTALE

$$|f_m(x)| = |f(x)|^m \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^m$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)^m \quad \text{converge perché } \frac{1}{\sqrt{2e}} < 1$$

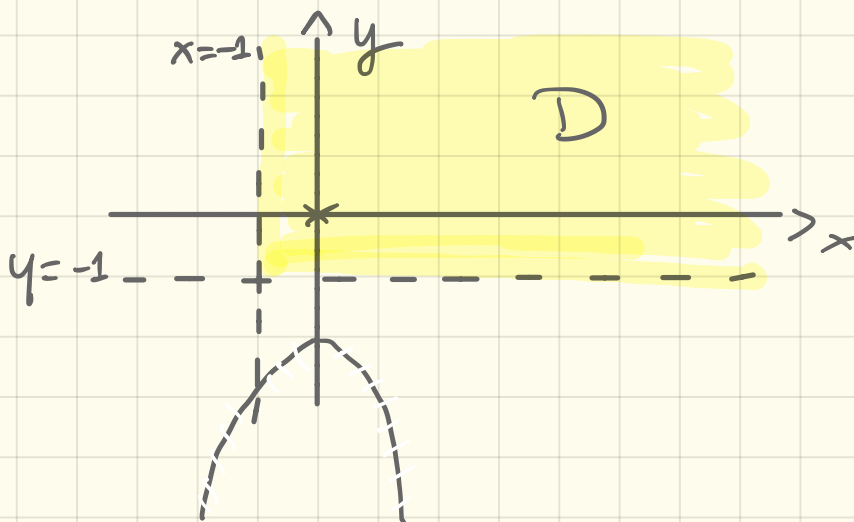
$\Rightarrow$ la serie converge TOTALMENTE $\forall x \in \mathbb{R}$

ESERCIZIO 5

$$f(x,y) = \frac{y^2 \lg(1+x^3)}{x^4 + 3y^2} [\lg(2x^2 + y + 2) - \lg(1+y)]$$

Domínio di definizione D

$$\begin{cases} 1+x^3 > 0 \\ x^4 + 3y^2 \neq 0 \\ 2x^2 + y + 2 > 0 \\ 1+y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ (x,y) \neq (0,0) \\ y > -2x^2 - 2 \\ y > -1 \end{cases}$$



D insieme aperto
illimitato, connesso.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \quad \text{in fatti}$$

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &\leq \left| \frac{y^2}{x^4 + 3y^2} \right| |\lg(1+x^3)| \left(|\lg(2x^2 + y + 2)| + |\lg(1+y)| \right) \\ &\leq \frac{1}{3} |\lg(1+x^3)| \left(|\lg(2x^2 + y + 2)| + |\lg(1+y)| \right) \rightarrow 0 \quad \text{as } (x,y) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

↓
no uso $\left| \frac{y^2}{x^4 + 3y^2} \right| \leq \frac{y^2}{3y^2} = \frac{1}{3}$

ESERCIZIO 6

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^{2/3} + (x-1)|x-1-1y|\sin y}{\sqrt[4]{(x-1)^4 + y^4}} & (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

$D = \mathbb{R}^2$

La funzione $\tilde{f}$ è continua in $(1,0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 0$$

$$|f(x,y) - 0| \leq \left| \frac{(x-1)^2 y^{2/3}}{\sqrt[4]{(x-1)^4 + y^4}} \right| + \frac{(x-1)^2}{\sqrt[4]{(x-1)^4 + y^4}} + \frac{|y| |\sin y|}{\sqrt[4]{(x-1)^4 + y^4}}$$

$$\leq \frac{|x-1|^2 |y|^{2/3}}{|x-1|} + \frac{|x-1|^2}{|x-1|} + \frac{|y| |\sin y|}{|y|}$$

$$= |x-1| |y|^{2/3} + |x-1| + |\sin y| \rightarrow 0 \quad (x,y) \rightarrow (1,0)$$

$$\Rightarrow f \text{ è continua in } (1,0) \Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{d}{dx} f(x,0) \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{(x-1)|x-1|}{|x-1|} \right) \Big|_{x=1} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \frac{d}{dy} f(1,y) \Big|_{y=0} = \frac{d}{dy} \left(- \frac{|y| \sin y}{|y|} \right) \Big|_{y=0} = - \cos y \Big|_{y=0} = -1$$

$$\Rightarrow f \text{ è derivabile in } (1,0) \Rightarrow \nabla f(1,0) = (1, -1)$$

Differentiability

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(1+h,k) - f(1,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{h^2 k^{2/3} + h|h| - |k| \operatorname{sgn} k}{\sqrt[4]{h^4+k^4}} - h + k \right) \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Se pouvo $k = -h$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{8/3} + h|h| + |h| \operatorname{sgn} h}{|h| \sqrt[4]{2} \sqrt{2} |h|} - \frac{2h}{|h| \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{2^{3/4}} \operatorname{sgn} h - \sqrt{2} \operatorname{sgn} h \neq 0$$

$\Rightarrow$ La fonction n'est différentiable en $(1,0)$.