

ANALISI MATEMATICA 2 (9 CFU)

2 Parte 26.6.2023

Cognome.....

Nome.....

n.matricola

Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x(y-1)^2 + (y-1)^4}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} |\cos x|^\alpha & \text{se } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

si studi, al variare del parametro $\alpha > 0$,**a** il dominio e la continuità in $(0, 1)$;**b** la derivabilità (derivate direzionali) in $(0, 1)$;**c** la differenziabilità in $(0, 1)$.**Esercizio 2** Determinare gli estremi locali e globali della funzione

$$f(x, y, z) = x^2(y-1)^3(z+2)^2$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale della funzione $f(x, y) = 8xy$ nel dominio $D = D_1 \cup D_2$ dove D_1 il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$ e

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$$

Esercizio 4 Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, \frac{z^2(y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}}, 2z \log[1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}] \right).$$

a Stabilire il suo insieme di definizione.**b** Verificare se il campo è irrotazionale e dimostrare che è conservativo senza calcolare il potenziale.**c** Calcolarne un potenziale ed individuare delle linee equipotenziali.**d** Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva $\mathbf{r}(t) = (\cos t, 1 + \sin t, 4)$ $t \in [0, \pi]$ e spiegare il risultato.**Esercizio 5** Dati il campo vettoriale $\vec{F}$ e la superficie S definiti da

$$\vec{F}(x, y, z) = (z(y-1), x, y-1) \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + 4(y-1)^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

a Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'esterno usando la definizione di flusso.**b** Calcolare il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso S orientata verso l'esterno usando il teorema di Stokes.**Esercizio 6** Sia V il volume descritto da

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z+1)^2 \leq x^2, 1 \leq x \leq 4\}$$

ed $\mathbf{F}$ il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = (x + z + 1, x, x + y)$$

a Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}$ attraverso ∂V e verificare il teorema della divergenza.

ESAME 26.6.2023 PARTE 2 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x(y-1)^2 + (y-1)^4}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} |\cos x|^\alpha & (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & (x,y) = (0,1) \end{cases} \quad \alpha > 0$$

$D = \mathbb{R}^2$, la funzione è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$ perché composizione di funzioni continue.

Studio la continuità in $(0,1)$.

luci $f(x,y) = 0$ infatti
 $(x,y) \rightarrow (0,1)$

$$|f(x,y) - 0| = \left| \frac{x^3 + 3x(y-1)^2 + (y-1)^4}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \right| \underbrace{|\cos x|^\alpha}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \left| \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \right| + \left| \frac{3x(y-1)^2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \right| + \left| \frac{(y-1)^4}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|x^3|}{|x|} + \frac{3|x||y-1|^2}{|x|} + \frac{|y-1|^4}{|y-1|} = x^2 + 3|y-1| + |y-1|^3 \rightarrow 0 \quad (x,y) \rightarrow (0,1)$$

$\Rightarrow f$ è continua in $(0,1) \Rightarrow f \in C^0(\mathbb{R}^2) \forall \alpha > 0$

Derivate direzionale in $(0,1)$

$$\begin{aligned} D_{\vec{\alpha}} f(0,1) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cos \theta, 1+t \sin \theta) - f(0,1)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^3 \theta + 3t \cos \theta t^2 \sin^2 \theta + t^4 \sin^4 \theta}{|t|t} |\cos(t \cos \theta)|^\alpha \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3}{|t|t} (\cos^3 \theta + 3 \cos \theta \sin^2 \theta + t \sin^4 \theta) |\cos(t \cos \theta)|^\alpha = 0 \end{aligned}$$

$\forall \alpha > 0$

La funzione $\bar{f}$ derivabile in $(0,1)$

Differenziabilità

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, 1+k) - f(0,1) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)h - \frac{\partial f}{\partial k}(0,1)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \\ = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^3 + 3hk^2 + k^4}{h^2+k^2} |\cos(h)|^\alpha = 0 \end{aligned}$$

infatti

$$\begin{aligned} \left| \frac{h^3 + 3hk^2 + k^4}{h^2+k^2} |\cos h|^\alpha - 0 \right| &\leq \left| \frac{h^3 + 3hk^2 + k^4}{h^2+k^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{|h|^3}{h^2+k^2} + \frac{3|h|k^2}{h^2+k^2} + \frac{k^4}{h^2+k^2} \leq |h| + 3|h| + k^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$(h,k) \rightarrow (0,0)$

$\Rightarrow f \in$ differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 2

$$f(x, y, z) = x^2 (y-1)^3 (z+2)^2 \quad D = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x (y-1)^3 (z+2)^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 (y-1)^2 (z+2)^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2x^2 (y-1)^3 (z+2) = 0 \end{cases}$$

Le tre equazioni si annullano per

$$x=0 \quad y=1 \quad z=-2 \Rightarrow 3 \text{ piani di pti critici.}$$

Studio e l'incremento della funzione nelle vicinanze dei punti critici

$$f(0, y, z) = f(x, 1, z) = f(x, y, -2) = 0$$

$\Rightarrow$ l'incremento $\Delta f = f(x, y, z)$ per tutti i piani.

$$\Delta f \geq 0 \Leftrightarrow x^2 (y-1)^3 (z+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 1$$

I punti

$(x, 1, z)$ (piano $y=1$) sono punti di sella
 $(x, z) \in \mathbb{R}^2$

I punti
 $(0, y, z)$ (piano $x=0$) sono
 $(y, z) \in \mathbb{R}^2$

punti di minimo $\alpha y > 1$

punti di selle $\alpha y = 1$

punti di massimo $\alpha y < 1$

I punti $(x, y, -2)$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (piano $z=-2$)
sono

punti di minimo $\alpha y > 1$

punti di selle $\alpha y = 1$

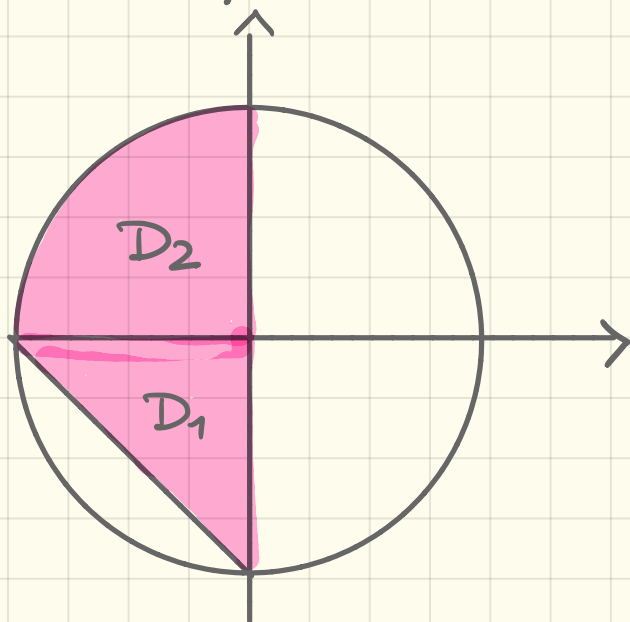
punti di max $\alpha y < 1$

ESERCIZIO 3

$$f(x,y) = 8xy$$

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,0] \quad -x-2 \leq y \leq 0\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0, y \geq 0\}$$



$$D = D_1 \cup D_2$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,0] \quad -x-2 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

$$\iint_D 8xy \, dx \, dy = \int_{-2}^0 \left(\int_{-x-2}^{\sqrt{4-x^2}} 8xy \, dy \right) dx =$$

$$= \int_{-2}^0 \left(8x \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{-x-2}^{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \int_{-2}^0 4x (4-x^2 - (x+2)^2) dx$$

$$= \int_{-2}^0 4x (4-x^2 - x^2 - 4x - 4) dx = \int_{-2}^0 (-8x^3 - 16x^2) dx = -\frac{32}{3}$$

Esercizio 4

$$\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$$

$$F_1(x, y, z) = \frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$

$$F_2(x, y, z) = \frac{z^2 (y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}}$$

$$F_3(x, y, z) = 2z \lg[1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}]$$

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (0, 1, z)\}$$

insieme aperto, illimitato, connesso, non semplicemente connesso

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \hat{i} \left(\frac{2z(y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} (1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} - \frac{2z(y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} (1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} \right) + \\ &- \hat{j} \left(\frac{2z x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} (1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} - \frac{2z x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} (1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} \right) + \\ &+ \hat{k} \left(\frac{z^2 x (y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} (1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} - \frac{z^2 x (y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} (1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} \right) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \nabla \wedge \vec{F} = 0$ ovvero $\vec{F}$ è irrotazionale
 $\Rightarrow \vec{F}$ è localmente conservativo.

$$\vec{F} = \nabla V \iff \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

$$\Gamma = \{ \gamma \subset D : \gamma \text{ chiusa, semplice, regolare} \}$$

(a) Sia $\gamma \in \Gamma$ non contiene al suo interno l'ora $(0, 1, z) \quad z \in \mathbb{R}$, esiste un dominio $B \subset D$ semplicemente connesso che contiene $\gamma \Rightarrow$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{dato che } \vec{F} \text{ è localmente conservativo}$$

(b) Sia $\gamma \in \Gamma$ contiene al suo interno l'ora $(0, 1, z) \quad z \in \mathbb{R}$, dato che $\nabla \wedge \vec{F} = 0$ possiamo usare la proprietà dei cammini equivalenti $\Rightarrow$

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donc $\mathcal{C}$ è la circonferenza

$$\vec{r}(\theta) \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \\ z = 0 \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad \vec{r}'(\theta) \begin{cases} x' = -\sin\theta \\ y' = \cos\theta \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (0, 0, 0) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow (a) + (b) \Rightarrow \oint_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \nabla U \quad \text{campo conservativo}$$

Calcolo il potenziale

Usando la 3^a

$$U(x, y, z) = \int F_3(x, y, z) dz =$$

$$= z^2 \lg[1 + \sqrt{x + (y-1)^2}] + C(x, y)$$

Usando la 1^a

$$\frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = F_1 \\ \frac{\partial U}{\partial y} = F_2 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = F_3 \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{z^2 x}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \cancel{(1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} + \frac{\partial c}{\partial x} = \cancel{F_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad c(x, y) = c(y)$$

$$U(x, y, z) = z^2 \lg[1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}] + c(y)$$

Usa la 2^a

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{z^2(y-1)}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} \cancel{(1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2})} + c'(y) = \cancel{F_2}$$

$$c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c$$

$$U(x, y, z) = z^2 \lg[1 + \sqrt{x^2 + (y-1)^2}] + c$$

Sono linee equipotenziali:

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = k_1 \\ z = k_2 \end{cases} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

$$f: \vec{r}(t) = (\cos t, 1 + \sin t, 4) \quad t \in [0, \pi] \quad \vec{c}$$

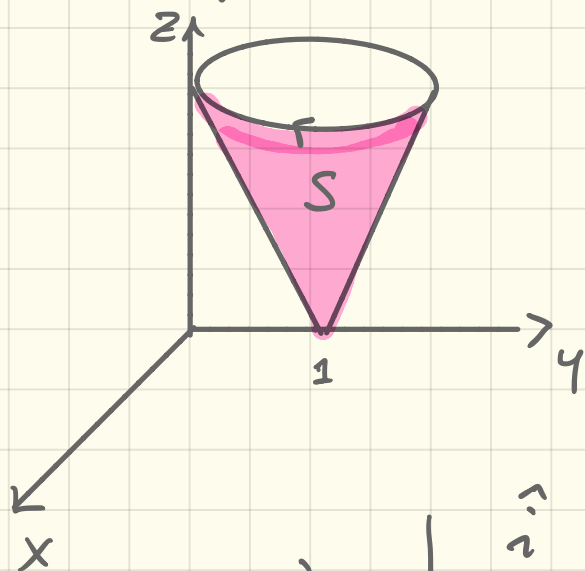
un arco di curva equipotenziale $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

ESERCIZIO 5

$$\vec{F}(x, y, z) = (z(y-1), x, y-1)$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + 4(y-1)^2, 0 \leq z \leq 1 \}$$



S in forma parametrica è

$$\begin{cases} x = t \cos \theta & t \in [0, 1] \\ y = \frac{t}{2} \sin \theta + 1 \\ z = t & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (1, y-1, 1-z)$$

$$\vec{r}_t = (t \cos \theta, \frac{t}{2} \sin \theta, 1)$$

$$\vec{r}_\theta = (-t \sin \theta, \frac{t}{2} \cos \theta, 0)$$

$$\vec{r}_t \wedge \vec{r}_\theta = (-\frac{t}{2} \cos \theta, -t \sin \theta, \frac{t}{2})$$

$$\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_t = (\frac{t}{2} \cos \theta, t \sin \theta, -\frac{t}{2}) \quad \text{uso questo}$$

perché $\hat{m}_e = \frac{\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_t}{|\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_t|}$

$$\begin{aligned}
\Phi(\nabla \wedge \vec{F}, S) &= \iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS = \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(1, \frac{t}{2} \sin \vartheta, 1-t \right) \cdot \left(\frac{t}{2} \cos \vartheta, t \sin \vartheta, -\frac{t}{2} \right) d\vartheta dt \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{2} \cos \vartheta + \frac{t^2}{2} \sin^2 \vartheta - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \right) d\vartheta dt \\
&= \int_0^1 \frac{t^2}{2} dt \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos \vartheta}{2} d\vartheta + 2\pi \int_0^1 \left(-\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2} \right) dt \\
&= \frac{1}{6} \cdot \pi + 2\pi \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \right) = \pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 0
\end{aligned}$$

TEOREMA di STOKES

$$\iint_S \nabla \wedge \vec{F} \cdot \hat{m} \, dS = \int_{\partial S^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\partial S^+ \begin{cases} x = \cos \vartheta \\ y = \frac{1}{2} \sin \vartheta \\ z = 1 \end{cases} \quad \vartheta \in [2\pi, 0]$$

$$\vec{F}'(\theta) = (-\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta, 0)$$

$$\int_{\partial^+ S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin\theta, \cos\theta, \frac{1}{2} \sin\theta \right) \cdot (-\sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta, 0) d\theta$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin^2\theta + \frac{1}{2} \cos^2\theta \right) d\theta =$$

$$= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1 - \cos 2\theta}{2} + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta =$$

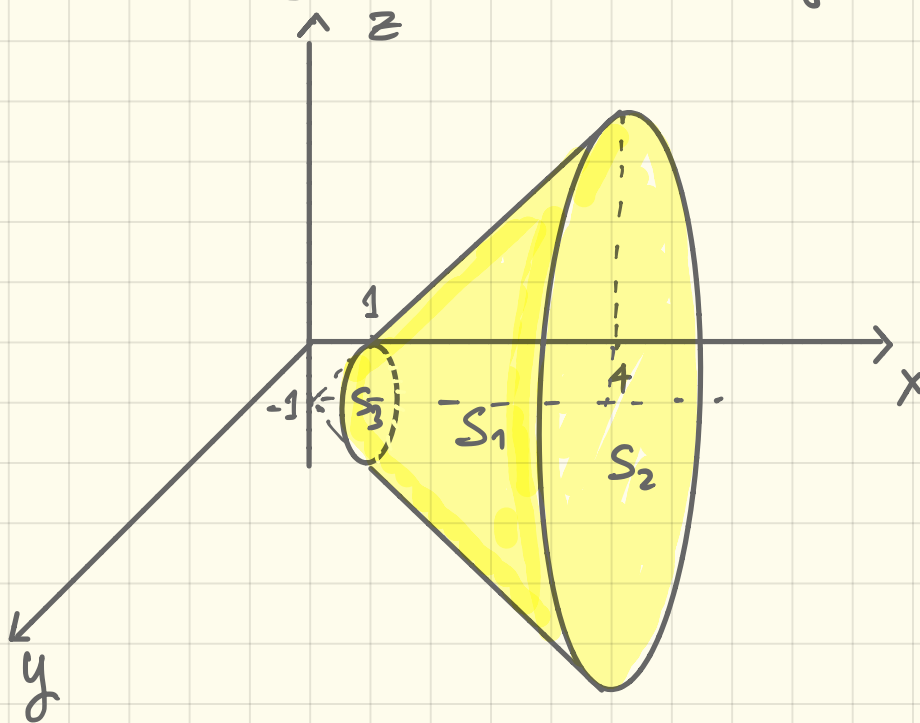
$$= - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta = 0$$

ESERCIZIO 6

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z+1)^2 \leq x^2 \quad 1 \leq x \leq 4 \}$$

$$\vec{F} = (x+z+1, x, x+y)$$

$$\partial V =$$



$$\partial V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + (z+1)^2 = x^2 \quad 1 \leq x \leq 4 \}$$

$$\partial V = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{F}, \partial V) &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS + \\ &+ \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS \end{aligned}$$

Calculo $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, dS = \Phi(\vec{F}, S_1)$

$$S_1 \begin{cases} x = t & t \in [1, 4] \\ y = t \cos \theta & \theta \in [0, 2\pi] \\ z = t \sin \theta - 1 \end{cases}$$

$$\vec{r}_t = (1, \cos \theta, \sin \theta)$$

$$\vec{r}_\theta = (0, -t \sin \theta, t \cos \theta)$$

$$\vec{r}_t \wedge \vec{r}_\theta = (t, -t \cos \theta, -t \sin \theta)$$

$$\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_t = (-t, t \cos \theta, t \sin \theta) \text{ uso questo}$$

perê $\hat{n}_e = \frac{\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_t}{|\vec{r}_\theta \wedge \vec{r}_t|}$

$$\Phi(\vec{F}, S_1) = \int_1^4 \int_0^{2\pi} (t + t \sin \theta, t, t + t \cos \theta) \cdot (-t, t \cos \theta, t \sin \theta) \, dt \, d\theta$$

$$= \int_1^4 \int_0^{2\pi} [-t^2 - \cancel{t^2 \sin \theta} + \cancel{t^2 \cos \theta} + \cancel{t^2 \sin \theta} + \cancel{t^2 \sin \theta \cos \theta}] \, dt \, d\theta$$

$$= \int_1^4 \int_0^{2\pi} (-t^2) \, dt \, d\theta = -2\pi \frac{1}{3} t^3 \Big|_1^4 = -42\pi$$

Calculus $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS = \Phi(\vec{F}, S_2)$

$$S_2 \begin{cases} x = 4 \\ y = \rho \cos \theta \\ z = \rho \sin \theta - 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 4] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\vec{r}_\rho = (0, \cos \theta, \sin \theta)$$

$$\vec{r}_\theta = (0, -\rho \sin \theta, \rho \cos \theta)$$

$$\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta = (\rho, 0, 0) \quad \hat{m}_e = \frac{\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta}{|\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\theta|}$$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{F}, S_2) &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (4 + \rho \sin \theta, 4, 4 + \rho \cos \theta) \cdot (\rho, 0, 0) \, d\rho \, d\theta = \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (4\rho + \rho^2 \sin \theta) \, d\rho \, d\theta = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_0^4 = 64\pi \end{aligned}$$

Calculus $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \hat{m}_e \, dS = \Phi(\vec{F}, S_3)$

$$S_3 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \sin \vartheta - 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} \rho \in [0, 1] \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$\vec{r}_\rho = (0, \cos \vartheta, \sin \vartheta)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (0, -\rho \sin \vartheta, \rho \cos \vartheta)$$

$$\vec{r}_\rho \wedge \vec{r}_\vartheta = (\rho, 0, 0)$$

$$\vec{r}_\vartheta \wedge \vec{r}_\rho = (-\rho, 0, 0) \quad \hat{m}_e = \frac{\vec{r}_\vartheta \wedge \vec{r}_\rho}{|\vec{r}_\vartheta \wedge \vec{r}_\rho|}$$

$$\Phi(\vec{F}, S_3) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + \rho \sin \vartheta, 1, 1 + \rho \cos \vartheta) \cdot (-\rho, 0, 0) \, d\rho \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-\rho - \rho^2 \sin \vartheta) \, d\rho \, d\vartheta = -2\pi \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_0^1 = -\pi$$

$$\Phi(\vec{F}, \partial V) = -42\pi + 64\pi - \pi = 21\pi$$

Calcolo il flusso usando il
TEOREMA della DIVERGENZA

$$\Phi(\vec{F}, V) = \int \int_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$V \quad \begin{cases} x = t & t \in [1, 4] \\ y = \rho \cos \vartheta & \rho \in [0, t] \\ z = \rho \sin \vartheta - 1 & \vartheta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$\vec{r}_t = (1, 0, 0)$$

$$\vec{r}_\rho = (0, \cos \vartheta, \sin \vartheta)$$

$$\vec{r}_\vartheta = (0, -\rho \sin \vartheta, \rho \cos \vartheta)$$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\rho \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \int_1^4 \int_0^t \int_0^{2\pi} 1 \, \rho \, d\rho \, dt \, d\vartheta =$$

$$= 2\pi \int_1^4 \frac{1}{2} t^2 dt = \pi \frac{1}{3} t^3 \Big|_1^4 = 21\pi$$