

ANALISI MATEMATICA 2 (9CFU)

2 Parte 26.6.2023

n.matricola

Cognome

Nome

Esercizio 1 Data la curva piana γ definita dall'equazione polare $\rho = 2\theta^2$ con $\theta \in [-\pi, \pi]$

a stabilire se la curva è: continua, chiusa, semplice;

b calcolare il vettore derivato e il suo modulo;

c stabilire se la curva è regolare precisando in caso contrario i punti non regolari;

d calcolare la lunghezza della curva confrontandola con quella del segmento congiungente gli estremi della curva.

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{n^2(4-x^2)}}{n^2 + \log n + \sqrt{n+1}}$$

a Determinare gli intervalli di convergenza puntuale ed assoluta e stimare dall'alto la somma della serie.

b Determinare gli intervalli di convergenza totale.

c Stabilire in quali intervalli la somma della serie $S(x)$ è continua.

d Stabilire in quali intervalli la serie derivabile termine a termine.

Esercizio 3 Data la funzione dispari periodica di periodo $T = 2$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = +1 \end{cases}$$

a Dopo aver disegnato il grafico di f nell'intervallo $(-2, 2)$, calcolare i coefficienti di Fourier di f , $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ e $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, e scrivere la serie di Fourier associata;

b studiare la convergenza in media quadratica della serie di Fourier; **c** studiare la convergenza puntuale della serie di Fourier e calcolarne la somma;

d scrivere la serie che si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier studiare la derivabilità termine a termine.

Esercizio 4 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) (2x + x^2)^n$$

a studiarne la convergenza puntuale, assoluta e totale;

b studiare la continuità della somma e la derivabilità termine a termine.

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{[(x^3 + (y-1)^2) \sin(|y-1|) \cos(x+2y-2)]}{x^2 + (y-1)^2} \log[1 - |x(y-1)|]$$

a Determinare il dominio di definizione e dire che tipo di insieme è (aperto, chiuso, limitato, connesso).

b Calcolare il limite di $f(x, y)$ per $(x, y) \rightarrow (0, 1)$.

Esercizio 6 Data la funzione

$$f(x, y) = (x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

a stabilire in quale sottoinsieme del piano è continua;

b stabilire in quale sottoinsieme del piano è derivabile;

c stabilire in quale sottoinsieme del piano è differenziabile.

ESAME 26.6.2023 PARTE 1 SCHEMA SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

$$\gamma : \rho = 2\theta^2 \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

$$\vec{r} \begin{cases} x = 2\theta^2 \cos \theta \\ y = 2\theta^2 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

La curva è continua perché lo sono le sue componenti:

$$\vec{r}(-\pi) = (-2\pi^2, 0) = \vec{r}(\pi) \Rightarrow \text{la curva è chiusa}$$

Il vettore $(\cos \theta, \sin \theta)$ non prende mai due volte
lo stesso punto in $\theta \in (-\pi, \pi)$, $\rho = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$

$\Rightarrow$ la curva è semplice.

$$|\vec{r}'(\theta)| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = \sqrt{4\theta^4 + 16\theta^2} = \sqrt{4\theta^2(\theta^2 + 4)} = \\ = 2|\theta| \sqrt{\theta^2 + 4}$$

$$\vec{r} \in C^1([-\pi, \pi]) \quad |\vec{r}'(\theta)| = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$$

$\Rightarrow$ la curva è regolare a tratti ed ha un
punto di non regolarità in $\theta = 0$.

$$\begin{aligned}
 l(\gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} 2|\theta| \sqrt{\theta^2 + 4} \, d\theta = 4 \int_0^{\pi} \theta \sqrt{\theta^2 + 4} \, d\theta = \\
 &= 4 \left. \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\theta^2 + 4)^{3/2} \right|_0^{\pi} = \frac{4}{3} \left[(\pi^2 + 4)^{3/2} - (4)^{3/2} \right] \\
 &= \frac{4}{3} \left[(\pi^2 + 4)^{3/2} - 8 \right]
 \end{aligned}$$

Essendo la curva chiusa la lunghezza del segmento che ne congiunge gli estremi è zero.

ESERCIZIO 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{n^2(4-x^2)}}{n^2 + \lg n + \sqrt{n+1}}$$

$$CN \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 4$$

La CN è verificata $\forall x \in [-\infty, -2] \cup [2, +\infty) = \tilde{I}$

La $f_n(x)$ è pari, $\tilde{I}$ è pari $\Rightarrow$ posso studiare la convergenza in $\tilde{I}_1 = [2, +\infty)$

$$x=2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + \lg n + \sqrt{n+1}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Studio la convergenza assoluta usando il criterio della radice in $(2, +\infty)$

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} = e^{n(4-x^2)} \sqrt[n]{\frac{n}{n^2 + \lg n + \sqrt{n+1}}} \sim e^{\frac{n(4-x^2)}{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente e puntualmente

$$\forall x \in (2, +\infty)$$

$$|f_m(x)| = \frac{m e^{m^2(4-x^2)}}{m^2 + \lg m + \sqrt{m+1}} \leq \frac{m e^{m^2(4-x^2)}}{m^2} \leq e^{m(4-x^2)}$$

$$\Rightarrow S(x) = \sum_{m=1}^{\infty} |f_m(x)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} e^{m(4-x^2)} = \left[\frac{1}{1 - e^{4-x^2}} - 1 \right]$$

CONVERGENZA TOTALE

$$f'_m(x) = \frac{m^3 e^{m^2(4-x^2)}}{m^2 + \lg m + \sqrt{m+1}} (-2x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$\Rightarrow f_m(x)$ è crescente in $(2, +\infty)$

$$\sup_{x \in (2, \infty)} |f_m(x)| = \frac{m}{m^2 + \lg m + \sqrt{m+1}} \sim \frac{1}{m}$$

$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ diverge $\Rightarrow$ la serie non converge

totalmente in $(2, +\infty)$

Definisco $I_\delta = [2+\delta, +\infty)$ $\delta > 0$

$$\max_{x \in I_\delta} |f_m(x)| = \frac{m e^{m^2(4-(2+\delta)^2)}}{m^2 + \lg m + \sqrt{m+1}} \sim \frac{e^{m^2(-4\delta-\delta^2)}}{m}$$

Dato che

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{m^2(-4\delta-\delta^2)}}{m} \leq \sum_{m=1}^{\infty} (e^{-4\delta-\delta^2})^m = \frac{1}{1 - e^{-4\delta-\delta^2}}$$

converge

$\Rightarrow$ La serie converge totalmente in $I_\delta \forall \delta > 0$.

CONTINUITÀ della somma della serie $S(x)$

1) $f_m(x) \in C^0(I_\delta) \quad \forall \delta > 0$

2) $\sum_n f_m(x)$ converge totalmente in $I_\delta \quad \forall \delta > 0$

$$S(x) \in C^0(I_\delta) \quad \forall \delta > 0$$

La continuità può essere estesa a $I = (2, +\infty)$:

$\forall x_0 \in (2, +\infty) \quad \exists \delta : x_0 \in I_\delta \Rightarrow S(x)$ è
continua in $x_0 \Rightarrow S(x) \in C^0(I)$.

CONVERGENZA TOTALE delle SERIE delle DERIVATE

La serie che si ottiene derivando termine a
termine è

$$- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m^3 e^{m^2(4-x^2)}}{m + \log m + \sqrt{m+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m (-x e)^{m^2(4-x^2)}$$

Studio la convergenza totale in $I = (2, +\infty)$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |f'_m(x)| = \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{a_m x e^{(4-x^2)m^2}}_{g_m(x)}$$

$$g'_m(x) = a_m e^{m^2(4-x^2)} (1 - 2n^2 x^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 x^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2n^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{m\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}m}$$

$$\Rightarrow g'_m(x) \leq 0 \quad \forall x \in (2, +\infty)$$

$$\Rightarrow g_m(x) \text{ è decrescente su } (2, +\infty)$$

$$\sup_{x \in I} |f'_m(x)| = \frac{1}{m + \lg m + \sqrt{m+1}} \sim \frac{1}{m}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \text{ diverge} \Rightarrow \text{la serie delle derivate}$$

$$\text{non converge totalmente su } I = (2, +\infty)$$

$$I_\delta = [2+\delta, +\infty) \quad \delta > 0$$

$$\max_{x \in I_\delta} |f'_m(x)| = \frac{2m^3(2+\delta) e^{-m^2(4\delta+\delta^2)}}{m + \lg m + \sqrt{m+1}}$$

$$\sim 2m^2(2+\delta) e^{-m^2(4\delta+\delta^2)}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2m^2(2+\delta) e^{-m^2(4\delta+\delta^2)} \quad \text{converge, infatti se}$$

applico il criterio della radice

$$\sqrt[m]{|f'_m(x)|} \sim \sqrt[m]{2m^2(2+\delta)} e^{-m(4\delta+\delta^2)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie delle derivate converge totalmente in I_δ

DERIVABILITÀ TERMINE a TERMINE

$$f_m(x) \in C^1(I_\delta) \quad \checkmark$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m(x) \text{ converge in } I_\delta \quad \checkmark$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f'_m(x) \text{ converge totalmente in } I_\delta \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ la serie è derivabile termine a termine
in I_δ . $\forall \delta > 0$

La derivabilità termine della serie può essere
estesa all'intervallo $(2, +\infty)$ in fatti:

$$\forall x_0 \in (2, +\infty) \quad \exists \delta > 0 : x_0 \in I_\delta \Rightarrow$$

la serie è derivabile termine a termine in x_0

$\Rightarrow$ la serie è derivabile f. a. t. in $(2, +\infty)$

Usando la perifrasi della funzione possiamo dire
in $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

- la serie converge assolutamente e puntualmente
- la somma della serie è continua

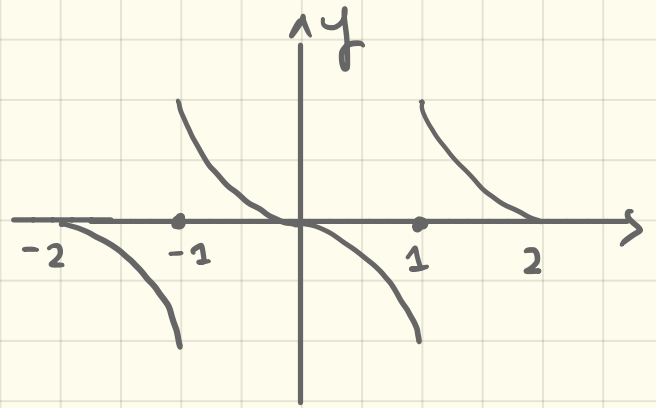
- la serie è olivobica A. o. t.

la serie converge totalmente in

$$(-\infty, -2-\delta] \cup [2+\delta, +\infty) \quad \forall \delta > 0.$$

Esercizio 3

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$



$$T=2 \quad \omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{DISPAR} \Rightarrow a_k = 0 \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(k\pi x) dx = 2 \int_0^1 (-x^2) \sin(k\pi x) dx$$

$$= -2 \left[-\frac{x^2}{k\pi} \cos(k\pi x) + \int_0^\pi \frac{2x \cos(k\pi x)}{k\pi} dx \right] =$$

$$= -2 \left[-\frac{\pi}{k} (-1)^k + \frac{2x \sin(k\pi x)}{(k\pi)^2} \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi \frac{\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2} dx \right]$$

$$= -2 \left[-\frac{\pi}{k} (-1)^k + \frac{2}{(k\pi)^3} \cos(k\pi x) \Big|_0^\pi \right] =$$

$$= \frac{2\pi}{k} (-1)^k - \frac{4}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1)$$

$f(x)$ è limitata ed integrabile $\Rightarrow$ la serie di Fourier converge ad $f(x)$ in media quadratica, ovvero

$$\text{Data } S_m f(x) = \sum_{k=1}^m b_k \sin(k\pi x)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (S_M f(x) - f(x))^2 dx = 0$$

La funzione $\bar{e}$ monotona in $(-1, 1)$, $f(-1^+) = 1$,
 $f(1^-) = -1$, la serie converge puntualmente
 ad $S(x)$

$$S(x) = \begin{cases} \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & \forall x \in (-1, 1) \\ \frac{f(-1^+) + f(1^-)}{2} & x = -1, 1 \end{cases}$$

Dato che $f(x) \in C^0(-1, 1)$

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-1, 1) \\ 0 & x = -1, 1 \end{cases} \Rightarrow S(x) = f(x)$$

Derivando la serie di Fourier termine a
 termine si ottiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\pi \left[\frac{2\pi(-1)^k}{k} - \frac{4}{(k\pi)^3} ((-1)^k - 1) \right] \cos(k\pi x)$$

La CN non è verificata $\Rightarrow$ la serie non
 converge.

ESERCIZIO 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lg n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) (2x+x^2)^n$$

$$y = 2x+x^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lg n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) y^n \quad \text{SERIE DI POTENZE}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{\lg(n+1)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}}}{\frac{\lg n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}}} \right| =$$

$$= \frac{n}{n+1} \left| \frac{\lg(n+1) - \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\lg n - \frac{1}{\sqrt{n}}} \right| \sim \frac{n}{n+1} \frac{\lg(n+1)}{\lg n}$$

$$\sim 1 \cdot 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \Rightarrow R = 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge assolutamente e
puntualmente $\forall y \in (-1, 1)$

Se $y = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lg n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

DIVERGE

Se $y = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lg n}{n} - \frac{1}{n\sqrt{n}} \right) (-1)^n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lg n}{n} (-1)^n$$

Converge per il criterio di Leibniz perché
serie a segni alterni e $\frac{\lg n}{n} \downarrow 0$ $n \rightarrow \infty$.

Convergenza assoluta $y \in (-1, 1)$

Convergenza puntuale $y \in [-1, 1)$

Tornando alle serie di potenze si ha
Convergenza assoluta

$$-1 < 2x + x^2 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x^2 + 2x - 1 &< 0 \\ x^2 + 2x + 1 &> 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \begin{cases} > 0 & x \neq -1 \\ = 0 & x = -1 \end{cases}$$

$$x^2 + 2x - 1 < 0 \quad x = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$$

$\Rightarrow$ per la serie di potenze quindi si ha
Convergenza assoluta

$$\forall x \in (-1 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -1 + \sqrt{2}) = I$$

Convergenza puntuale

$$\forall x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$$

Convergenza TOTALE

$$|y| \leq \delta < 1 \Leftrightarrow |2x + x^2| \leq \delta < 1$$

$$-\delta \leq 2x + x^2 \leq \delta$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - \delta \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1 - \sqrt{1+\delta}, -1 + \sqrt{1+\delta}] \\ x^2 + 2x + \delta \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1 - \sqrt{1-\delta}] \cup [1 + \sqrt{1-\delta}, +\infty) \end{cases}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{1+\delta} \quad x = -1 \pm \sqrt{1-\delta}$$

$\Rightarrow$ La serie converge TOTALMENTE in

$$I_\delta = [-1 - \sqrt{1-\delta}, -1 - \sqrt{1-\delta}] \cup [-1 + \sqrt{1-\delta}, -1 + \sqrt{1+\delta}]$$

Dato che $y = 2x + x^2 \in C^1(I_\delta)$ per le proprietà

delle serie di potenze la serie è derivabile
termine a termine e la sua somma è
continua $\forall x \in I$

Esercizio 5

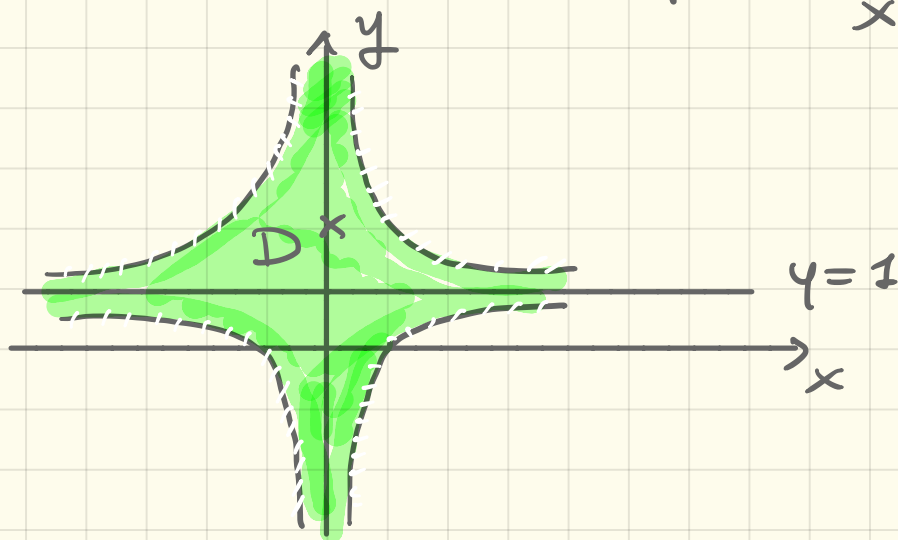
$$f(x,y) = \frac{[x^3 + (y-1)^2] \sin(|y-1|) \cos(x+2y-2)}{x^2 + (y-1)^2} \lg[1 - |x(y-1)|]$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,1) \mid x(y-1) \mid < 1 \}$$

insieme aperto, connesso, illimitato

$$|x(y-1)| = 1 \Leftrightarrow y-1 = \pm \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 + \frac{1}{x} \quad y = 1 - \frac{1}{x}$$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \lg[1 - |x(y-1)|] = 0$$

$$f(x,y) = g(x,y) \lg[1 - |x(y-1)|]$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} g(x,y) = 0 \quad \text{ci fatti} \rightarrow$$

$$|g(x, y) - 0| = \left| \frac{[x^3 + (y-1)^2] \sin(|y-1|) \cos(x+2y-2)}{x^2 + (y-1)^2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{x^3 + (y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} \right| |\sin(|y-1|)| \leq$$

$$\leq \left[\frac{|x|^3}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{|y-1|^2}{x^2 + (y-1)^2} \right] |\sin(|y-1|)| \leq$$

$$\leq \left(\frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y-1|^2}{(y-1)^2} \right) |\sin(|y-1|)| = (|x| + 1) |\sin(|y-1|)| \rightarrow 0$$

(x, y) → (0, 1)

ESERCIZIO 6

$$f(x,y) = (x-1)^2 + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \quad D = \mathbb{R}^2$$

$$f \in C^0(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x-1) + \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \quad (x,y) \neq (1,0)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) &= \left. \frac{d}{dx} f(x,0) \right|_{x=1} = \left. \frac{d}{dx} [(x-1)^2 + |x-1|] \right|_{x=1} \\ &= \left. 2(x-1) + \operatorname{sgn}(x-1) \right|_{x=1} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \rightarrow 1^+ \\ -1 & \text{se } x \rightarrow 1^- \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la derivata non esiste in $(1,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \left. \frac{d}{dy} f(1,y) \right|_{y=0} = \left. \frac{d}{dy} |y| \right|_{y=0} = \operatorname{sgn} y \Big|_{y=0} = \begin{cases} 1 & y \rightarrow 0^+ \\ -1 & y \rightarrow 0^- \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la derivata non esiste in $(1,0)$

$\Rightarrow f$ è derivabile in $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$

$f \in C^1(A) \Rightarrow f$ è differenziabile in A